I

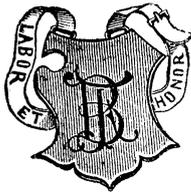
PRINCIPII DI GEOMETRIA

LOGICAMENTE ESPOSTI

SAGGIO

DI

GIUSEPPE PEANO

Professore nella R. Accademia militare
libero docente nella R. Università di Torino.

TORINO
FRATELLI BOCCA EDITORI
LIBRAI DI S. M. IL RE D'ITALIA

SUCCURSALI
ROMA
Via del Corso, 216-217
FIRENZE
Via Cerretani, 8

DEPOSITI
PALERMO
Università, 12
(N. Carosio)
MESSINA
(Daly)
CATANIA
S. Maria al Ros.°, 23
(N. Carosio)

1889

PREFAZIONE

Quali fra gli enti geometrici si possono definire, e quali occorre assumere senza definizione?

E fra le proprietà, sperimentalmente vere, di questi enti, quali bisogna assumere senza dimostrazione, e quali si possono dedurre in conseguenza?

L'analisi di queste questioni, appartenenti ad un tempo alla Logica e alla Geometria, forma l'oggetto del presente scritto.

Onde non far lavoro vano in queste ricerche, già oggetto di molti studii, bisogna attenerci rigorosamente alle regole: Usare nelle nostre proposizioni solo termini di valore pienamente determinato; ben precisare cosa si intenda per definizione e per dimostrazione.

I termini di cui ci serviamo nelle nostre proposizioni appartengono in parte al linguaggio comune, o alla Logica, in parte alla Geometria. I termini appartenenti alla Logica sono nel linguaggio comune innumerevoli; ma in un mio precedente opuscolo (*) già feci vedere come con un numero

(*) *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Torino 1889.

Lo studio delle principali operazioni di Logica è dovuto a G. Boole (V. ivi). Servendomi degli studii del Boole, e di altri, riuscii pel primo, nell'opuscolo menzionato, ad esporre una teoria usando puramente segni aventi significato determinato, o mediante definizione, o mediante le loro proprietà.

limitatissimo di convenzioni si possano esprimere tutte le relazioni logiche di cui abbiamo bisogno.

Per un più ampio studio delle proprietà delle operazioni e relazioni logiche qui introdotte rimando all'opuscolo menzionato. Qui mi limiterò ad un breve cenno sul significato dei segni, e a dare nelle note degli schiarimenti, in guisa che si possano senz'altro intendere le formule di questo scritto. Si ha così il mezzo di esprimere le proposizioni di Geometria sotto una forma rigorosa, che invano si desidererebbe dal linguaggio comune, e la soluzione delle questioni proposte riesce di molto agevolata.

Nel presente scritto mi son limitato a quelle proposizioni fondamentali di Geometria, in cui non comparisce il concetto di moto, ossia ai fondamenti della Geometria di posizione. Si vede in esso che, partendo dai concetti non definiti di punto e retta limitata, si possono definire la retta illimitata, il piano e le sue parti, come pure le parti dello spazio. Riesce pure possibile riconoscere, fra le proposizioni, quelle (assiomi) che esprimono le più semplici proprietà degli enti considerati, e quelle (teoremi) che si possono dedurre da altre più semplici.

Nel § 1 sono spiegati, in linguaggio comune, i segni degli enti non definiti.

Nel § 2 trovansi tutte le definizioni di cui qui si fa uso. Nel successivo sono contenute le proposizioni che dipendono solo dalle definizioni e dagli assiomi logici.

Nei §§ seguenti sono enunciati gli assiomi; ogni assioma è seguìto dai teoremi che ne sono conseguenza. Così ad es.

la prop. 6 del § 11 si dimostra senza ricorrere agli assiomi dei §§ seguenti; ma non si può, o meglio, io non so dedurla dai soli assiomi contenuti nei §§ precedenti.

Da quest'ordine nelle proposizioni risulta chiaro il valore degli assiomi, e si è moralmente certi della loro indipendenza. Si avrebbe ancora potuto segnare accanto ad ogni proposizione gli assiomi da cui dipende. Invece per scopo didattico converrebbe ordinare le proposizioni a seconda del soggetto; p. e. prima quelle che trattano dei segmenti, poi quelle sui raggi, sulla retta indefinita, sul triangolo, ecc.

Se nel presente saggio la soluzione delle questioni proposte ha raggiunto l'assoluto rigore, non può dirsi che essa abbia pure raggiunta la semplicità. Una semplificazione notevole si otterrebbe ordinando nel modo che già si disse le proposizioni. Altre semplificazioni possono produrre ricerche ulteriori.

Sarò lieto del faticoso lavoro fatto nel comporre e ordinare queste formule, se il mio scritto contribuirà ad escludere dalla Geometria elementare molte idee mal determinate ed inutili, ottenendo così rigore e semplicità.

Torino, Giugno 1889.

NOTAZIONI DI LOGICA E ABBREVIAZIONI

Il segno si legge

P *proposizione.* Esso comparisce solo nelle citazioni; così in un paragrafo qualunque P7 indica la proposizione 7 di quel paragrafo; §2 P5 indica la proposizione 5 del § 2.

K *classe,* o *categoria di enti.* Nelle formule seguenti esso è sempre susseguito dal segno **1**, che significa *punto;* la formula K **1** si legge *una classe di punti,* o *figura geometrica.*

ϵ *è,* o *sono.* La formula $a \epsilon b$ si legge « a è un b », ovvero « a è un individuo della classe b ». Invece $a, b \epsilon c$ si legge « a e b sono dei c ». Quindi le formule $a \epsilon \mathbf{1}$, e $a, b \epsilon \mathbf{1}$ si leggono rispettivamente « a è un punto », « a e b sono dei punti ». Il segno ϵ è l'iniziale greca delle parole *è, sono.*

$\cap$ *e.* Esso indica la congiunzione. Se a e b sono classi, $a \cap b$ indica ciò che è ad un tempo a e b. Se a e b sono proposizioni, la stessa formula indica l'affermazione simultanea delle due proposizioni. Questo segno si sopprime fra le proposizioni, e quando non vi sia pericolo d'ambiguità.

$\cup$ *o.* Esso indica la disgiunzione. Si osservino le proprietà commutativa e distributiva delle operazioni indicate coi segni $\cap$ e $\cup$, e che ciascuna è distributiva rispetto all'altra.

$-$ *non.* Quindi $-\epsilon$ si legge *non è;* $a - \epsilon b$ si legge « a non è un b ».

Λ *nulla,* o *assurdo.* Questo segno ha il primo significato trattandosi di classi, il secondo se di proposizioni.
Il segno Λ è l'iniziale rovesciata della parola *vero.*

$\supset$ *è contenuto,* o *si deduce,* secondochè si tratta di classi o di proposizioni. Esso è l'iniziale rovesciata della parola *contiene.*

$=$ *è eguale.* Trattandosi di classi o di proposizioni, la relazione $a = b$ indica la coesistenza delle due relazioni $a \supset b$, e $b \supset a$.
Se a e b sono proposizioni contenenti degli enti indeterminati x, y (oltre ad altre lettere), allora la scrittura $a \supset_{x, y} b$ significa « qualunque siano x e y, da a si deduce b », e la scrittura $a =_{x, y} b$ significa « la $a = b$ è un'identità rispetto ad x e y ».

$[x \epsilon] a$, ove a sia una proposizione contenente la lettera x, indica la classe formata dagli x per cui è vera la proposizione a, ossia le radici della condizione a. Di questo segno faremo uso solamente nelle definizioni del § 2.

$(a, b)[x, y]f$, ove f sia una formula contenente le due lettere x e y, indica ciò che diventa quella formula ove al posto di x e y si legga a e b. Useremo questo segno soltanto in alcune dimostrazioni. Queste due ultime convenzioni sono casi particolari di altra che qui non esporremo.

Hp *ipotesi.* } Queste abbreviazioni compaiono solamente nelle dimostrazioni.
Ts *tesi.* }

Le parentesi } { racchiudono le dimostrazioni.

Colle lettere $a, b, \ldots, z$ indicheremo, come d'uso, enti indeterminati qualunque. Non ci serviremo a questo scopo nè di maiuscole, nè di accenti.

Useremo come in Algebra le parentesi ( ) per indicare l'ordine in cui si devono raggruppare i varii segni d'una formula. Serviranno pure allo stesso scopo i segni di punteggiatura . : .·. :: ecc. Onde interpretare una formula divisa coi punti, prima si riuniranno i segni non separati da alcun punto, poi quelli da uno, poi quelli da due, e così via. I punti si tralascieranno quando non siavi pericolo di ambiguità.

Dei segni precedenti bastano per enunciare le prop. (teor. ed assiomi) i 7 seguenti: ϵ, $\cap$, $\cup$, $-$, Λ, Ↄ, $=$. L'ultimo ha la stessa forma, ma un significato più esteso, che in Algebra. I segni Ↄ e $\cup$, benchè utili, non sono necessarii, potendosi, al posto di a Ↄ b scrivere

$$a - b = \Lambda,$$

e al posto di $a \cup b$ scrivere

$$-((-a) \cap (-b)).$$

Si noti che la corrispondenza fra i segni ϵ, $\cap$, $\cup$, ecc. e le parole *è*, *e*, *o*, ecc. è solo approssimata; invero queste parole hanno nel linguaggio comune diversi significati, di cui uno solo corrisponde a quei segni logici.

PRINCIPII DI GEOMETRIA

---

§ 1. Punto e segmento.

Il segno $\mathbf{1}$ leggasi *punto*.

Il segno $=$, fra due punti, indica la loro identità (coincidenza).

Se a, b sono punti, con ab intenderemo la classe formata dai punti interni al segmento ab. Quindi la formula $c \,\varepsilon\, ab$ significa « c è un punto interno al segmento ab ».

Assiomi sul segno $=$.

1. $a = a$.
2. $a = b \,.=.\, b = a$.
3. $a = b \,.\, b = c : \supset .\, a = c$.

Assiomi sui segmenti.

4. $a, b \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\supset .\, ab \,\varepsilon\, \mathrm{K}\, \mathbf{1}$.
5. $a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\, a = b \,.\, c = d : \supset .\, ac = bd$.

§ 2. Definizioni.

1. $a, b \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\supset \therefore a'b =: \mathbf{1} \,.\, [x \,\varepsilon]\, (b \,\varepsilon\, ax)$.
2. $a, b \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\supset \therefore ab' =: \mathbf{1} \,.\, [x \,\varepsilon]\, (a \,\varepsilon\, xb)$.
3. $a \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\, k \,\varepsilon\, \mathrm{K}\, \mathbf{1} : \supset \therefore ak =: \mathbf{1} \,.\, [x \,\varepsilon]\, (y \,\varepsilon\, k \,.\, x \,\varepsilon\, ay : -\!=_y \Lambda)$.
4. » $: \supset \therefore a'k =: \mathbf{1} \,.\, [x \,\varepsilon]\, (y \,\varepsilon\, k \,.\, x \,\varepsilon\, a'y : -\!=_y \Lambda)$.
5. » $: \supset \therefore ak' =: \mathbf{1} \,.\, [x \,\varepsilon]\, (y \,\varepsilon\, k \,.\, x \,\varepsilon\, ay' : -\!=_y \Lambda)$.
6. $h, k \,\varepsilon\, \mathrm{K}\, \mathbf{1} : \supset \therefore hk =: \mathbf{1} \,.\, [x \,\varepsilon]\, (y \,\varepsilon\, h \,.\, x \,\varepsilon\, yk : -\!=_y \Lambda)$.
7. » $: \supset \therefore h'k =: \mathbf{1} \,.\, [x \,\varepsilon]\, (y \,\varepsilon\, h \,.\, x \,\varepsilon\, y'k : -\!=_y \Lambda)$.
8. » $: \supset \therefore hk' =: \mathbf{1} \,.\, [x \,\varepsilon]\, (y \,\varepsilon\, h \,.\, x \,\varepsilon\, yk' : -\!=_y \Lambda)$.
9. $h \,\varepsilon\, \mathrm{K}\, \mathbf{1} \,.\supset .\, h'' = hh'$.
10. $\mathbf{2} = [x \,\varepsilon]\, (a, b \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\, a -\!= b \,.\, x = (ab)'' : -\!=_{a,b} \Lambda)$.
11. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\supset :: a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{Cl} \,.=\therefore r \,\varepsilon\, \mathbf{2} \,.\, a, b, c \,\varepsilon\, r : -\!=_r \Lambda$.
12. $\mathbf{3} = [x \,\varepsilon]\, (a, b, c \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\, a, b, c -\varepsilon\, \mathrm{Cl} \,.\, x = (abc)'' : -\!=_{a,b,c} \Lambda)$.

13. $a, b, c, d \in \mathbf{1} . \supset :: a, b, c, d \in \mathrm{Cp} . = \therefore p \in \mathbf{3} . a, b, c, d \in p : - =_p \Lambda .$

14. $\mathrm{Cnv} . = . [x \in] (x \in \mathrm{K}\,1 : a, b \in x . \supset_{a,b} . ab \supset x).$

Abbreviazioni.

$abc = a(bc) . a'bc = a'(bc) . a'b'c = a'(b'c) . abcd = a(bcd)$. ecc.

§ 3. Teoremi.

Sulle definizioni 1 *e* 2.

1. $a, b \in \mathbf{1} . \supset \therefore c \in a'b . = : c \in \mathbf{1} . b \in ac.$ $\{P1 = §2\,P1\}$

2. $a, b, c \in \mathbf{1} . \supset : c \in a'b . = . b \in ac.$ $\{P1 \supset P2\}$

3. $a, b, c \in \mathbf{1} . \supset : c \in ab' . = . a \in cb.$ $\{§2\,P2 \supset P3\}$

4. $a, b, c \in \mathbf{1} . \supset : a \in bc . = . b \in ac' . = . c \in b'a.$ $\{P4 = : P2 . P3\}$

Sulle definizioni 3, 4, 5.

5. $a \in \mathbf{1} . k \in \mathrm{K}\,\mathbf{1} : \supset ::: x \in ak . = :: x \in \mathbf{1} \therefore y \in k . x \in ay : - =_y \Lambda .$ $\{P5 = §2\,P3\}$

6. $a \in \mathbf{1} . k \in \mathrm{K}\,\mathbf{1} : \supset \therefore x \in ak . = : x \in \mathbf{1} . k \cap a'x - = \Lambda .$ $\{P6 = P5\}$

7. » $: \supset \therefore x \in a'k . = : x \in \mathbf{1} . k \cap ax - = \Lambda .$ $\{P7 = §2\,P4\}$

8. » $: \supset \therefore x \in ak' . = : x \in \mathbf{1} . k \cap x'a - = \Lambda .$ $\{P8 = §2\,P5\}$

9. $a, b \in \mathbf{1} . k \in \mathrm{K}\,\mathbf{1} : \supset : b \in ak . = . a \in bk'.$ $\{P6 . P8 : \supset P9\}$

10. $a \in \mathbf{1} . h, k \in \mathrm{K}\,\mathbf{1} . h \supset k : \supset . ah \supset ak.$

11. » » $: \supset . a'h \supset a'k.$

12. » » $: \supset . ah' \supset ak'.$

$\{\mathrm{Hp} . P8 : \supset \therefore x \in ah' . = : x \in \mathbf{1} . h \cap x'a - = \Lambda : \supset : x \in \mathbf{1} . k \cap x'a - = \Lambda : = . x \in ak' : \supset \mathrm{Ts}.\}$

13. $a \in \mathbf{1} . h, k \in \mathrm{K}\,\mathbf{1} : \supset . a(h \cup k) = ah \cup ak.$

14. » $: \supset . a'(h \cup k) = a'h \cup a'k.$

15. » $: \supset . a(h \cup k)' = ah' \cup ak'.$

16. $a \in \mathbf{1} . k \in \mathrm{K}\,\mathbf{1} . k = \Lambda : \supset : ak = \Lambda . a'k = \Lambda . ak' = \Lambda .$

Sulle definizioni 6, 7, 8.

17. $h, k \in \mathrm{K1} : \supset ::: x \in hk . = :: x \in \mathbf{1} \therefore y \in h . z \in k . x \in yz : - =_{y,z} \Lambda .$

18. » $::: x \in h'k . =$ » » $x \in y'z$ »

19. » $::: x \in hk' . =$ » » $x \in yz'$ »

20. $h, k, l \in K1 . h \supset k : \supset : hl \supset kl . h'l \supset k'l . hl' \supset kl'$.

21. $h, k, l \in K1 : \supset : (h \cup k) l = hl \cup kl . (h \cup k)' l = h'l \cup k'l . (h \cup k) l'$
$= hl' \cup kl'$.

22. $h, k \in K1 . h = \Lambda : \supset . hk = h'k = hk' = \Lambda$.

Sulla definizione 9.

23. $k \in K1 . \supset :: x \in k'' . = \therefore y, z \in k . x \in y'z : -=_{y,z} \Lambda$.

24. $h, k \in K1 . h \supset k : \supset . h'' \supset k''$.

25. $a \in 1 . k \in K1 . b \in k : \supset . (ab)'' \supset (ak)''$.

Sulle definizioni 10 *e* 12.

26. $x \in \mathbf{2} . = \therefore a, b \in 1 . a -= b . x \in (ab)'' : -=_{a,b} \Lambda$.

27. $a, b \in 1 . a -= b : \supset . (a\, b)'' \in \mathbf{2}$.

28. $x \in \mathbf{3} . = \therefore a, b, c \in 1 - \mathrm{Cl}. x \in (abc)'' : -=_{a,b,c} \Lambda$.

29. $a, b, c \in 1 - \mathrm{Cl}. \supset . (abc)'' \in \mathbf{3}$.

Sulla definizione 14.

30. $h \in \mathrm{Cnv}. = \therefore h \in K1 : a, b \in h . \supset_{a,b} . ab \supset h$.

31. $h, k \in \mathrm{Cnv}. \supset . h \cap k \in \mathrm{Cnv}$.
$\{ \mathrm{Hp}. \supset \therefore h, k \in K1 : a, b \in h . \supset_{a,b} . ab \supset h : a, b \in k . \supset_{a,b} . ab \supset k$
$\therefore \supset \therefore h \cap k \in K1 : a, b \in h \cap k . \supset_{a,b} . ab \supset hk \therefore \supset . \mathrm{Ts} \}$.

32. $k \in \mathrm{Cnv}. l \in K1 . l \supset k . a \in k : \supset . al \supset k$.

33. $k \in \mathrm{Cnv}. a, b, c \in k : \supset . abc \supset k$.

34. $k \in \mathrm{Cnv}. a, b, c, d \in k : \supset . abcd \supset k$.

35. $k \in \mathrm{Cnv}. a, b \in k : \supset . (ab)'' \supset k''$.

§ 4. Assiomi I, II, III, IV.

Assioma I.

1. $\mathbf{1} -= \Lambda$.

Assioma II.

2. $a \in 1 . \supset \therefore x \in 1 . x -= a : -=_{x} \Lambda$.

Assioma III.

3. $a \in 1 . \supset . aa = \Lambda$.

Teoremi.

4. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, a = b : \supset . \, ab = \Lambda.$ $\quad \} \mathrm{Hp.} \supset . \, ab = aa = \Lambda \{$
5. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, ab - = \Lambda : \supset . \, a - = b.$ $\quad \} \mathrm{P5} = \mathrm{P4} \{$
6. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, c \varepsilon ab : \supset . \, a - = b.$ $\quad \} \mathrm{Hp.} \supset : ab - = \Lambda \,.\, \mathrm{P5} : \supset \mathrm{Ts.} \{$
7. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} \,.\, b \varepsilon a'c : \supset . \, b - = a.$ $\quad \} \mathrm{P7} = \mathrm{P6} \{$
8. $a \varepsilon \mathbf{1} \,.\, k \varepsilon \mathrm{K}\mathbf{1} : \supset . \, a - \varepsilon a'k.$

Assioma IV.

9. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, a - = b : \supset . \, ab - = \Lambda.$

Teoremi.

10. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, ab = \Lambda : \supset . \, a = b.$ $\quad \} \mathrm{P10} = \mathrm{P9} \{$
11. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, \supset : a = b \,. = .\, ab = \Lambda.$ $\quad \} \mathrm{P11} = : \mathrm{P4} \,.\, \mathrm{P10} \{$
12. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, a - = b : \supset . \, b \varepsilon a'ab.$
$\} \mathrm{Hp.} \supset . \, ab - = \Lambda \,.\, \supset . \, ab \cap ab - = \Lambda \,.\, \supset . \, \mathrm{Ts.} \{$

§ 5. **Assiomi V, VI, VII.**

Assioma V.

1. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, \supset . \, ab = ba.$

Teoremi.

2. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, \supset . \, a'b = ba'.$
$\} \mathrm{Hp} : \supset : x \varepsilon a'b \,. = .\, b \varepsilon ax \,. = .\, b \varepsilon xa \,. = .\, x \varepsilon ba' : \supset \mathrm{Ts} \{$
3. $a, b \varepsilon \mathbf{1} \,.\, k \varepsilon \mathrm{K}\mathbf{1} : \supset : b \varepsilon a'k \,. = .\, a \varepsilon b'k.$ $\quad \} \mathrm{Hp} \,.\, \S 3 \, \mathrm{P7} : \supset : b \varepsilon$
$a'k. = .\, k \cap ab - = \Lambda \,. = .\, k \cap ba - = \Lambda \,. = a \varepsilon b'k : \supset . \, \mathrm{Ts} \{$
4. $a, b, c, d \varepsilon \mathbf{1} \,.\, \supset : ab \cap cd - = \Lambda \,. = .\, a \varepsilon b'cd \,. = .\, b \varepsilon a'cd \,. = .$
$c \varepsilon d'ab \,. = .\, d \varepsilon c'ab.$
5. » $\,.\, \supset : a'b \cap cd - = \Lambda \,. = .\, a \varepsilon b(cd)' \,. = .\, b \varepsilon acd \,. =$
$.\, c \varepsilon d'a'b \,. = .\, d \varepsilon c'a'b.$
6. » $\,.\, \supset : a'b \cap c'd - = \Lambda \,. = .\, a \varepsilon b(c'd)' . = .\, b \varepsilon ac'd . =$
$.\, c \varepsilon d(a'b)' . = .\, d \varepsilon ca'b.$
7. $h, k \varepsilon \mathrm{K}\mathbf{1} \,.\, \supset . \, hk = kh.$
8. » $\,.\, \supset . \, h'k = kh'.$

Assioma VI.

9. $a, b \in 1 . \supset . a - \in ab.$

Teoremi.

10. $a, b \in 1 . \supset . b - \in ab.$ $\}$Hp . P9 . P1 : $\supset : b - \in ba . ba = ab : \supset$ Ts$\{$

11. $a, b \in 1 . c \in ab : \supset : c - = a . c - = b.$ $\}$P11 = : P9 . P10$\{$

12. $a, b \in 1 . c \in a'b : \supset : c - = a . c - = b . a - = b.$
$\}$P12 = : P11 . §4 P7$\{$

13. $a \in 1 . \supset . a'a = \Lambda.$

14. $a \in 1 . \supset . a'' = \Lambda.$

15. $a \in 1 . k \in K 1 : \supset . a - \in ak.$

Assioma VII.

16. $a, b \in 1 . a - = b : \supset . a'b - = \Lambda.$

Teoremi.

17. $a, b \in 1 . \supset : a'b = \Lambda . = . a = b.$ $\}$P17 = : P16 . P13$\{$

18. $a, b \in 1 . a - = b : \supset . b \in aa'b.$
$\}$Hp . $\supset . a'b - = \Lambda . \supset . a'b \cap a'b - = \Lambda . \supset .$ Ts$\{$

§ 6. Assioma VIII.

1. $a, b, c, d \in 1 . c \in ad . b \in ac : \supset . b \in ad.$

Teoremi.

2. $a, c, d \in 1 . c \in ad : \supset . ac \supset ad$ $\}$P2 = P1$\{$

3. $a, b \in 1 . c \in ab : \supset . ac \supset ab.$ $\}$P3 = $b\, [d]$ P2$\{$

4. » » $: \supset . cb \supset ab.$ $\}$P4 = $(a, b)\, [b, a]$ P3$\{$

5. » » $: \supset . ac \cup c \cup cb \supset ab$ $\}$P5 = : P3 . P4$\{$

6. $a, b \in 1 . c \in ab . d \in ac : \supset . cd \supset ab.$
$\}$Hp . P3 . P4 : $\supset . cd \supset ac . ac \supset ab : \supset .$ Ts$\{$

7. $a, b \in 1 . c \in ab : \supset . c \in a'ab.$ $\}$Hp . $\supset : c - = a : \supset :$
$ac - = \Lambda . ac \supset ab . \supset : ac \cap ab - = \Lambda : \supset .$ Ts$\{$

8. $a, b \in 1 . \supset . ab \supset a'ab.$ $\}$P8 = P7$\{$

9. $a, c \,\varepsilon\, 1 \,.\, b \,\varepsilon\, a'c :\supset. \, b \,\varepsilon\, a'ac.$ }P9 = P8{

10. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\supset.\, a'b \supset a'ab.$ }P10 = P9{

11. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\, a \,-\!=\, b :\supset. \, ab \cup b \cup a'b \supset a'ab.$
}P11 =: P8 . P10 . §4 P12{

12. $a, b, c \,\varepsilon\, 1 \,.\, b \,\varepsilon\, ac :\supset. \, a'c \supset a'b.$ }P12 = P1{

13. $a, c \,\varepsilon\, 1 \,.\, b \,\varepsilon\, ac :\supset. \, b \,\varepsilon\, aa'c.$
}Hp . §4 P6 $:\supset: c \,-\!=\, a$. §5 P16 $:\supset: a'c \,-\!=\, \Lambda \,.\, a'c \supset a'b :\supset.$ Ts{

14. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\supset.\, ab \supset aa'b.$ }P14 = P13{

15. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\, c \,\varepsilon\, a'b :\supset. \, c \,\varepsilon\, aa'b.$ }P15 = P13{

16. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\supset.\, a'b \supset aa'b.$ }P16 = P15{

17. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\, a \,-\!=\, b :\supset. \, ab \cup b \cup a'b \supset aa'b.$
}P14 . P16 . §5 P18 $:\supset$ P17{

18. $a, b, c \,\varepsilon\, 1 \,.\, b \,\varepsilon\, ac \,.\, c \,\varepsilon\, ab := \Lambda.$
}Hp . $(b)\,[d]$ P1 $:\supset: b \,\varepsilon\, ab$. §5 P10 $:\supset \Lambda${

19. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\supset.\, ab \cap a'b = \Lambda.$ }P19 = P18{

20. $b, c \,\varepsilon\, 1 \,.\supset.\, c'b \cap b'c = \Lambda.$ }P20 = P18{

21. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\supset.\, a'b \cap b'a = \Lambda.$ }P21 = P20{

22. $a, b, d \,\varepsilon\, 1 \,.\, a'b \cap ad \,-\!=\, \Lambda :\supset. \, b \,\varepsilon\, ad.$ }P22 = P1{

23. $a, b, d \,\varepsilon\, 1 \,.\, b \,\varepsilon\, aad :\supset. \, b \,\varepsilon\, ad.$ }P23 = P22{

24. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\supset.\, aab \supset ab.$ }P24 = P23{

25. $a, b, d \,\varepsilon\, 1 \,.\, d \,\varepsilon\, a'a'b :\supset. \, d \,\varepsilon\, a'b.$ }P25 = P22{

26. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\supset.\, a'a'b \supset a'b.$ }P26 = P25{

27. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\, a \,-\!=\, b :\supset. \, b \,\varepsilon\, (ab)''.$ }Hp . §4 P9 . §5 P10 $:\supset \therefore c \,\varepsilon\, ab \,.\, d \,\varepsilon\, cb : -\!=_{c,d} \Lambda \therefore\supset\therefore c, d \,\varepsilon\, ab \,.\, b \,\varepsilon\, c'd : -\!=_{c,d} \Lambda \therefore\supset$ Ts{

28. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\supset.\, ab \supset (ab)''.$ }Hp . $x \,\varepsilon\, ab :\supset: x \,-\!=\, a \,.\, x \,\varepsilon\, (ax)'' \,.\, ax \supset ab \,.\, (ax)'' \supset (ab)'' :\supset. \, x \,\varepsilon\, (ab)''${

§ 7. Assioma IX.

1. $a, d \,\varepsilon\, 1 \,.\, b, c \,\varepsilon\, ad :\supset: b = c \,.\cup.\, b \,\varepsilon\, ac \,.\cup.\, b \,\varepsilon\, cd.$

Teoremi.

2. $a, d \,\varepsilon\, 1 \,.\, c \,\varepsilon\, ad :\supset. \, ad \supset ac \cup c \cup cd.$ }P2 = P1{

3. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\, c \,\varepsilon\, ab :\supset. \, ab \supset ac \cup c \cup cb.$ }P3 = P2{

4. $a, b \,\varepsilon\, 1 \,.\, c \,\varepsilon\, ab :\supset. \, ab = ac \cup c \cup cb.$ }P4 =: P3 . §6 P5{

5. $a, d \epsilon 1 . b \epsilon ad . c \epsilon bd : \supset . b \epsilon ac.$ }Hp . §6 P1 P18 $: \supset :$
$a, d \epsilon 1 . b, c \epsilon ad . b -= c . b - \epsilon cd .$ P1 $: \supset .$ Ts{

6. $a, d \epsilon 1 . b \epsilon ad : \supset . bd \supset a'b.$ }P6 = P5{

7. $a, b \epsilon 1 . c \epsilon a'b : \supset . bc \supset a'b.$ }P7 = $(c)\ [d]$ P6{

8. $a, b \epsilon 1 . c \epsilon a'b : \supset . bc \cup c \cup a'c \supset a'b.$ }P8 = : P7 . §6 P12{

9. $a, b \epsilon 1 . c \epsilon a'b : \supset . bc \cap a'b -= \Lambda.$
}Hp $. \supset : c -= b . bc -= \Lambda . bc \supset a'b : \supset$ Ts{

10. $a, b \epsilon 1 . c \epsilon a'b : \supset . c \epsilon b'a'b.$ }P10 = P9{

11. $a, b \epsilon 1 . \supset . a'b \supset b'a'b.$ }P11 = P10{

12. $a, c \epsilon 1 . b \epsilon ac : \supset . ac \cap a'b -= \Lambda.$
}Hp . P9 $: \supset : bc \supset ac . bc \cap a'b -= \Lambda : \supset .$ Ts{

13. $a, c \epsilon 1 . b \epsilon ac : \supset . b \epsilon aac.$ }P13 = P12{

14. $a, c \epsilon 1 . \supset . ac \supset aac.$ }P14 = P13{

15. $a, b \epsilon 1 . \supset . ab \supset aab.$ }P15 = $b\ [c]$ P14{

16. $a, b \epsilon 1 . \supset . aab = ab.$ }P16 = : P15 . §6 P24{

17. $a, b \epsilon 1 . c \epsilon a'b : \supset . c \epsilon a'a'b.$ }P17 = P12{

18. $a, b \epsilon 1 . \supset . a'b \supset a'a'b.$ }P18 = P17{

19. $a, b \epsilon 1 . \supset . a'a'b = a'b.$ }P19 = : P18 . §6 P26{

20. $a \epsilon 1 . k \epsilon \mathrm{K} 1 : \supset . aak = ak.$

21. » » $: \supset . a'a'k = a'k.$

22. $b, d \epsilon 1 . c \epsilon bd : \supset . d'b \supset c'b.$ }P22 = P5{

23. $a, b \epsilon 1 . c \epsilon a'b : \supset . a'c \supset b'c.$ }P23 = $(a, b, c)\ [b, c, d]$ P22{

24. $a, b \epsilon 1 . c \epsilon a'b : \supset . b'c \cap a'b -= \Lambda.$
}Hp . P23 . §6 P12 $: \supset : a'c -= \Lambda . a'c \supset b'c . a'c \supset a'b : \supset .$ Ts{

25. $a, b \epsilon 1 . c \epsilon a'b : \supset . c \epsilon bba'.$ }P25 = P24{

26. $a, b \epsilon 1 . \supset . a'b \supset bba'.$ }P26 = P25{

27. $a, b, c \epsilon 1 . a'b \cap b'c -= \Lambda : \supset . b \epsilon ac.$ }P27 = P5{

28. $a, b \epsilon 1 . c \epsilon bba' : \supset . c \epsilon ba'.$ }P28 = P27{

29. $a, b \epsilon 1 . \supset . bba' \supset ba'.$ }P29 = P28{

30. $a, b \epsilon 1 . \supset . bba' = ba'.$ }P30 = : P29 . P26{

31. $a \epsilon 1 . k \epsilon \mathrm{K} 1 : \supset . aak' = ak'.$

32. $a, e \epsilon 1 . c \epsilon ae . b \epsilon ac . d \epsilon ce : \supset . c \epsilon bd.$
}Hp . P5 $: \supset : c \epsilon be . b \epsilon ce : \supset .$ Ts{

33. $a, e \epsilon 1 . c \epsilon ae . b \epsilon ac . b \epsilon ce : = \Lambda.$
}Hp . $b\ [d]$ P 32 $: \supset : c \epsilon bb .$ §4 P3 $: \supset \Lambda${

34. $a, e \varepsilon 1 . c \varepsilon ae : \supset . ac \cap ce = \Lambda.$ }P34 = P33{

35. $a, b \varepsilon 1 . c \varepsilon ab : \supset . ac \cap cb = \Lambda.$ }P35 = P34{

36. $a, b \varepsilon 1 . \supset . a'b \supset (ab)''.$ }Hp $. x \varepsilon a'b : \supset \therefore c \varepsilon ab . d \varepsilon bc :$
$- =_{c,d} \Lambda \therefore \supset \therefore c, d \varepsilon ab . x \varepsilon c'd : - =_{c,d} \Lambda \therefore \supset . x \varepsilon (ab)''${

37. $a, b \varepsilon 1 . a - = b : \supset . b'a \cup a \cup ab \cup b \cup a'b \supset (ab)''.$
}P36 . §6 P27 P28 : $\supset$ P37{

38. $a \varepsilon 1 . k \varepsilon \mathrm{K}1 . a - \varepsilon k : \supset . k'a \cup a \cup ak \cup k \cup a'k \supset (ak)''.$

39. $a, b, c \varepsilon 1 . a - \varepsilon bc : \supset . (bc)'a \cup a \cup abc \cup bc \cup a'bc \supset (abc)''.$

40. $a, b \varepsilon 1 . c \varepsilon a'b . d \varepsilon ac : \supset . d \varepsilon ab \cup b \cup a'b.$
}Hp . P1 . P7 : $\supset : d \varepsilon ab \cup b \cup bc . bc \supset a'b : \supset$. Ts{

41. $a, b \varepsilon 1 . d \varepsilon aa'b : \supset . d \varepsilon ab \cup b \cup a'b.$ }P41 = P40{

42. $a, b \varepsilon 1 . \supset . aa'b \supset ab \cup b \cup a'b.$ }P42 = P41{

43. $a, b \varepsilon 1 . a - = b : \supset . aa'b = ab \cup b \cup a'b.$
}P42 . §6 P17 : $\supset$ P43{

44. $a \varepsilon 1 . k \varepsilon \mathrm{K}1 . a - \varepsilon k : \supset . aa'k = ak \cup k \cup a'k.$

45. $a, b \varepsilon 1 . c, d \varepsilon ab : \supset . cd \supset ab.$
}Hp . $d = c$. §4 P4 : $\supset$. Ts. (α)
Hp . $d \varepsilon ac$. §6 P6 : $\supset$. Ts. (β)
Hp . $d \varepsilon cb . (a, b) [b, a]$ (β) : $\supset$ Ts. (γ)
Hp . P1 . (α) (β) (γ) : $\supset$. Ts.{

46. $a, b \varepsilon 1 . \supset . ab \varepsilon$ Cnv. }P46 = P45{

47. $a, b \varepsilon 1 . \supset . a \cup ab \varepsilon$ Cnv.

48. » $. \supset . a \cup ab \cup b \varepsilon$ Cnv.

§ 8. Assioma X.

1. $a, b \varepsilon 1 . c, d \varepsilon a'b : \supset : c = d . \cup . d \varepsilon bc . \cup . c \varepsilon bd.$

Teoremi.

2. $a, b \varepsilon 1 . c \varepsilon a'b : \supset . a'b \supset bc \cup c \cup b'c.$ }P2 = P1{

3. $a, b \varepsilon 1 . c \varepsilon a'b : \supset . a'b \supset bc \cup c \cup a'c.$ }P2 . §7 P23 : $\supset$ P3{

4. $a, b \varepsilon 1 . c \varepsilon a'b : \supset . a'b = bc \cup c \cup a'c.$ }P4 = : P3 . §7 P8{

5. $a, b \varepsilon 1 . c \varepsilon a'b : \supset . a'b \supset ac \cup c \cup a'c.$
}Hp . P4 . §6 P3 : $\supset : a'b = bc \cup c \cup a'c . bc \supset ac : \supset$. Ts{

6. $a, b \varepsilon 1 . c, d \varepsilon a'b : \supset . d \varepsilon ac \cup c \cup a'c.$ }P6 = P5{

7. $a, c, d \in \mathbf{1} . ac \cap ad -= \Lambda : \supset . d \in ac \cup c \cup a'c.$ $\}$P7 = P6$\{$

8. $a, c \in \mathbf{1} . d \in a'ac : \supset . d \in ac \cup c \cup a'c.$ $\}$P8 = P7$\{$

9. $a, c \in \mathbf{1} . \supset . a'ac \supset ac \cup c \cup a'c.$ $\}$P9 = P8$\{$

10. $a, b \in \mathbf{1} . \supset . a'ab \supset ab \cup b \cup a'b.$ $\}$P10 = P9$\{$

11. $a, b \in \mathbf{1} . a -= b : \supset . a'ab = ab \cup b \cup a'b.$
$\}$P10 . §6 P11 : $\supset$ P11$\{$

12. $a, b \in \mathbf{1} : \supset . a'ab = aa'b.$ $\}$P11 . §7 P43 : $\supset$ P12$\{$

13. $a \in \mathbf{1} . k \in \mathrm{K}\,\mathbf{1} : \supset . a'ak = aa'k.$

14. $a, b \in \mathbf{1} . c, d \in a'b : \supset . cd \supset a'b.$
$\}$Hp . $c = d : \supset : cd = \Lambda : \supset$ Ts. (α)
Hp . $d \in bc$. §6 P3 . §7 P7 : $\supset : cd \supset bc . bc \supset a'b : \supset$ Ts. (β)
Hp . $c \in bd . (c, d)\,[d, c]$ (β) : $\supset$. Ts. (γ)
Hp . P1 . (α) (β) (γ) : $\supset$. Ts.$\{$

15. $a, b \in \mathbf{1} . \supset . a'b \in \mathrm{Cnv}.$ $\}$P15 = P14$\{$

16. $a, b \in \mathbf{1} . \supset . b \cup a'b \in \mathrm{Cnv}.$ $\}$P16 = : P15 . §7 P7$\{$

17. $a, b, c \in \mathbf{1} . b \in ca : \supset . c'ca = c'cb.$
$\}$Hp . P11 . §7 P4 . P3 : $\supset : c'ca = ca \cup a \cup c'a = cb \cup b \cup ba \cup a$
$\cup\, c'a = cb \cup b \cup c'cb : \supset$ Ts$\{$

18. $a, b, c \in \mathbf{1} . b \in c'a : \supset . c'ca = c'cb.$ $\}$P18 = $(b, a)\,[a, b]$ P17$\{$

19. $a, c \in \mathbf{1} . b \in c'ca : \supset . c'ca = c'cb.$ $\}$P19 = : P17 . P18$\{$

§ 9. **Assioma XI.**

1. $a, b, c, d \in \mathbf{1} . b \in ac . c \in bd : \supset . c \in ad.$

Teoremi.

2. $a, b, c \in \mathbf{1} . b \in ac : \supset . b'c \supset a'c.$ $\}$P2 = P1$\{$

3. $a, b, c \in \mathbf{1} . b \in ac : \supset . b'c = a'c.$ $\}$P3 = : P2 . §7 P23$\{$

4. $a, b, c \in \mathbf{1} . b \in c'a : \supset . b'c = a'c.$ $\}$P4 = $(b, a)\,[a, b]$ P3$\{$

5. $a, c \in \mathbf{1} . b \in c'ca : \supset . b'c = a'c.$ $\}$P3 . P4 . §8 P11 : $\supset$. P5$\{$

6. $a, b \in \mathbf{1} . c \in ab : \supset . c'ab \supset b'a \cup a \cup ab \cup b \cup a'b.$
$\}$Hp . §7 P4 . §8 P11 . P3 : $\supset : ab = ac \cup c \cup cb . c'ab = c'ac \cup c'cb$
$. c'ac = ca \cup a \cup c'a . c'cb = cb \cup b \cup c'b . c'a = b'a . c'b = a'b$
$: \supset$. Ts$\{$

7. $a, b \in \mathbf{1} . \supset . (ab)'' \supset b'a \cup a \cup ab \cup b \cup a'b.$ $\}$P7 = P6$\{$

8. $a, b \in \mathbf{1} . a - = b : \supset . (ab)'' = b'a \cup a \cup ab \cup b \cup a'b.$
$\}$P7 . §7 P37 $: \supset .$ P8$\{$

9. $a, b \in \mathbf{1} . a - = b : \supset . (ab)'' = b'ba \cup b \cup a'b.$
$\}$P8 . §8 P11 $: \supset .$ P9$\{$

10. $a, c \in \mathbf{1} . b \in c'ca : \supset . (ac)'' = (bc)''.$ $\}$P9 . P5 . §8 P19 $: \supset$ P10$\{$

11. $a, c \in \mathbf{1} . b \in a'c : \supset . b'c = c'ca.$
$\}$Hp . §8 P4 . P3 . §8 P11 $: \supset : b'c = ca \cup a \cup b'a . b'a = c'a . c'ca = ca \cup a \cup c'a : \supset$ Ts.$\{$

12. $a, c \in \mathbf{1} . b \in a'c : \supset . (ac)'' = (bc)''.$
$\}$Hp . P11 $: \supset : b'c = c'ca . a'c = c'cb : \supset : c'ca \cup c \cup a'c = b'c \cup c \cup c'cb : \supset$ Ts$\{$

13. $a, c \in \mathbf{1} . b \in (ac)'' . b - = c : \supset . (ac)'' = (bc)''.$
$\}$P13 $= :$ P10 . P12$\{$

14. $a, b \in \mathbf{1} . c, d \in (ab)'' . c - = d : \supset . (ab)'' = (cd)''.$ $\}$P13 $\supset$ P14$\{$

15. $r \in \mathbf{2} . c, d \in r . c - = d : \supset . r = (cd)''.$ $\}$P15 $=$ P14$\{$

16. $r, s \in \mathbf{2} . a, b \in \mathbf{1} . a, b \in r \cap s . a - = b : \supset . r = s.$
$\}$Hp . P15 $: \supset : r = (ab)'' . s = (ab)'' : \supset$ Ts$\{$

17. $a, b \in \mathbf{1} . \supset . (ab)'' \in \mathrm{Cnv}.$ $\}$P14 $\supset$ P17$\{$

18. $\mathbf{2} \supset \mathrm{Cnv}.$

19. $a, b, c \in \mathbf{1} . a - = b : \supset : a, b, c \in \mathrm{Cl} . = . c \in (ab)''.$

20. $a, b, c \in \mathbf{1} . \supset \therefore a, b, c \in \mathrm{Cl} : = : a = b . \cup . a = c . \cup . b = c . \cup . a \in bc . \cup . b \in ac . \cup . c \in ab.$

21. $a, b, c \in \mathbf{1} . d \in bc : \supset : a, b, c \in \mathrm{Cl} . = . a, b, d \in \mathrm{Cl}.$

22. $a, b, c \in \mathbf{1} . e \in abc : \supset : a, b, c \in \mathrm{Cl} . = . a, b, e \in \mathrm{Cl}.$

§ 10. Assiomi XII e XIII.

Assioma XII.

1. $r \in \mathbf{2} . \supset \therefore x \in \mathbf{1} . x - \in r : - =_x \Lambda.$

Assioma XIII.

2. $a, b, c \in \mathbf{1} . a, b, c - \in \mathrm{Cl} . d \in bc . e \in ad : \supset \therefore f \in ac . e \in bf : - =_f \Lambda.$

Teoremi.

3. $a, b, c, e \in \mathbf{1} . a, b, c - \in \mathrm{Cl} . bc \cap a'e - = \Lambda : \supset . ac \cap b'e - = \Lambda.$
$\}$P3 $=$ P2$\{$

4. $a, b, c, e \epsilon \mathbf{1} . a, b, c - \epsilon \mathrm{Cl} : \supset : bc \cap a'e -= \Lambda . = . ac \cap b'e -= \Lambda .$
$\} \mathrm{P}4 = : \mathrm{P}3 . (b, a) [a, b] \mathrm{P}3 \{$

5. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . \supset : e \epsilon abc . = . e \epsilon bac.$ $\quad \} \mathrm{P}5 = \mathrm{P}4 \{$

6. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . \supset . abc = bac.$ $\quad \} \mathrm{P}6 = \mathrm{P}5 \{$

7. » $. \supset . abc = (ab) c.$
$\} \mathrm{Hp} . \supset . a (bc) = a (cb) = c (ab) = (ab) c \{$

8. $a, b, e \epsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . \supset : c \epsilon b'a'e . = . c \epsilon a'b'e . = . c \epsilon (ab)'e.$
$\} \mathrm{P}8 = : \mathrm{P}5 . \mathrm{P}7 \{$

9. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . \supset . b'a'c = a'b'c = (ab)'c.$ $\quad \} \mathrm{P}9 = \mathrm{P}8 \{$

10. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . p \epsilon ab . q \epsilon ac : \supset . pq \supset abc.$
$\} \mathrm{Hp} . \supset : pq \supset pac . pa \supset ab . pac \supset abc : \supset \mathrm{Ts} \{$

11. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} . a - \epsilon bc . p \epsilon ab . q \epsilon ac : \supset . pq \supset abc.$
$\} \mathrm{P}10 . \S 6 \, \mathrm{P}1 : \supset . \mathrm{P}11 \{$

12. $k \epsilon \mathrm{Cnv} . a \epsilon \mathbf{1} . a - \epsilon k . b, c \epsilon k . p \epsilon ab . q \epsilon ac : \supset . pq \supset ak.$
$\} \mathrm{Hp} . \supset : bc \supset k . a - \epsilon bc . pq \supset abc . abc \supset ak : \supset . \mathrm{Ts} \{$

13. $k \epsilon \mathrm{Cnv} . a \epsilon \mathbf{1} . a - \epsilon k : \supset . ak \, \mathrm{Cnv}.$ $\quad \} \mathrm{P}13 = \mathrm{P}12 \{$

14. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} . a - \epsilon bc : \supset . abc \epsilon \mathrm{Cnv}.$

15. $a, b, c, d \epsilon \mathbf{1} . b - \epsilon cd . a - \epsilon bcd : \supset . abcd \epsilon \mathrm{Cnv}.$

16. $k \epsilon \mathrm{Cnv} . a \epsilon \mathbf{1} . a - \epsilon k : \supset . ak \cup k \epsilon \mathrm{Cnv}.$

17. $k \epsilon \mathrm{Cnv} . a \epsilon \mathbf{1} : \supset . a \cup ak \epsilon \mathrm{Cnv}.$

18. $k \epsilon \mathrm{Cnv} . a \epsilon \mathbf{1} : \supset . a \cup ak \cup k \epsilon \mathrm{Cnv}.$

19. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . d \epsilon bc . e \epsilon ad . x \epsilon b'e : \supset . x \epsilon adc \cup ac \cup b'ac.$
$\} \mathrm{Hp} . \mathrm{P}2 : \supset \therefore f \epsilon ac : e \epsilon bf : -=_f \Lambda .$ $\quad (\alpha)$
$\mathrm{Hp} . f \epsilon ac . f \epsilon b'e : \supset : b'e = ef \cup f \cup b'f . ef \supset abc . f \supset ac . b'f \supset b'ac : \supset . \mathrm{Ts}.$ $\quad (\beta)$
$\mathrm{Hp} . (\alpha) (\beta) : \supset . \mathrm{Ts} \{$

20. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . d \epsilon bc : \supset . b'ad \supset adc \cup ac \cup b'ac.$ $\quad \} \mathrm{P}20 = \mathrm{P}19 \{$

21. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . \supset . bc' \supset (abc)''.$
$\} \mathrm{Hp} . \supset . ab -= \Lambda .$ $\quad (\alpha)$
$\mathrm{Hp} . p \epsilon ab . x \epsilon bc' : \supset . x'p \cap ac -= \Lambda .$ $\quad (\beta)$
$\mathrm{Hp} . p \epsilon ab . x \epsilon bc' . q \epsilon ac . q \epsilon x'p : \supset : pq \supset abc . x \epsilon (pq)'' . (pq)'' \supset (abc)'' : \supset . x \epsilon (abc)''.$ $\quad (\gamma)$
$\mathrm{Hp} . x \epsilon bc' . (\alpha) (\beta) (\gamma) : \supset . x \epsilon (abc)'' . \{$

22. $a, b, c \epsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . \supset . a \cup b \cup c \cup ab \cup \ldots \cup a'b \cup \ldots \cup abc \cup a'bc \cup \ldots \cup a'b'c \cup \ldots \supset (abc)''.$ $\quad \} \mathrm{P}21 . \S 7 \, \mathrm{P}39 : \supset \mathrm{P}22 \{$

23. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, \supset . \, (bc)'' \supset (abc)''$.

24. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, r = (bc)'' : \supset . \, a'r \supset (abc)''$.

25. $p \in \mathbf{3} \,.\, r \in \mathbf{2} : \supset \therefore x \in p \,.\, x - \in r : - =_x \Lambda$.

$\}$Hp . $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, p = (abc)'' \,.\, a - \in r : \supset$. Ts. (α)

» » $. \, a \in r \,.\, b - \in r : \supset$. Ts. (β)

» » $. \, a \in r \,.\, b \in r : \supset : c - \in r : \supset$. Ts. (γ)

Hp . (α) (β) (γ) : $\supset$ Ts.$\{$

26. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, p \in abc : \supset . \, abc = p \cup pa \cup pab \cup pb \cup pbc \cup pc \cup pca$.

$\}$Hp . $\supset . \, bc \cup a'p - = \Lambda$. (α)

Hp . $d \in bc \,.\, d \in a'p : \supset : bc = bd \cup d \cup dc \,.\, abc = abd \cup ad \cup adc \,.\, p \in ad \,.\, ad = ap \cup p \cup pd \,.\, abd = bap \cup bp \cup bpd \,.\, adc = cap \cup cp \cup cpd \,.\, pbc = pbd \cup pd \cup pdc : \supset$. Ts. (β)

Hp . (α) (β) : $\supset$ Ts.$\{$

27. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, p, q \in abc \,.\, p - = q : \supset . \, p'q \cap (a \cup ab \cup b \cup bc \cup c \cup ca) - = \Lambda$.

$\}$Hp . P26 : $\supset : q \in p \, (a \cup ab \cup b \cup bc \cup c \cup ca) : \supset$ Ts.$\{$

28. $r \in \mathbf{2} \,.\, a \in \mathbf{1} \,.\, a - \in r \,.\, b \in r \,.\, c \in b'a \,.\, d \in a'r : \supset . \, d \in c'r$.

$\}$Hp . $\supset . \, r \cap ad - = \Lambda$. (α)

Hp . $e \in r \,.\, e \in ad \,.\, e = b : \supset : d \in a'b \,.\, a'b = c'b : \supset$. Ts. (β)

Hp . $e \in r \,.\, e \in ad \,.\, e - = b : \supset . \, a, b, d - \in \mathrm{Cl} \,.\, r = (be)'' \,.\, b'e \cap dc - = \Lambda : \supset : r \cap dc - = \Lambda : \supset$. Ts. (γ)

Hp . (α) (β) (γ) : $\supset$ Ts.$\{$

29. $r \in \mathbf{2} \,.\, a \in \mathbf{1} \,.\, a - \in r \,.\, b \in r \,.\, c \in b'a : \supset . \, a'r \supset c'r$ $\}$P29 = P28$\{$

30. $r \in \mathbf{2} \,.\, c \in \mathbf{1} \,.\, c - \in r \,.\, a \in cr : \supset . \, a'r \supset c'r$. $\}$P30 = P29$\{$

31. $a, b, c \in \mathbf{1} \,.\, - \mathrm{Cl} \,.\, p \in abc : \supset . \, p'abc \supset a \cup \ldots \cup ab \cup \ldots \cup a'b \cup \ldots \cup abc \cup a'bc \cup \ldots \cup a'b'c \cup \ldots$

$\}$Hp . $\supset . \, p'pa = pa \cup a \cup p'a \supset abc \cup a \cup b'c'a$. (α)

Hp . $\supset . \, p'pab = pab \cup ab \cup p'ab \supset abc \cup ab \cup p'(ab)''$. (β)

Hp . $\supset . \, p'(ab)'' \supset c'(ab)''$. (γ)

Hp . (α) (β) (γ) : $\supset$ Ts.$\{$

32. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} : \supset . \, (abc)'' = a \cup b \cup c \cup ab \cup ac \cup bc \cup a'b \cup ab' \cup b'c \cup cb' \cup c'a \cup ac' \cup abc \cup a'bc \cup b'ca \cup c'ab \cup a'b'c \cup b'c'a \cup c'a'b$. $\}$P22 . P31 : $\supset$. P32$\{$

33. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, \supset \therefore x \varepsilon (abc)'' :=: a, b, x \varepsilon \mathrm{Cl} \,.\, \cup \,.\, a, c, x \varepsilon \mathrm{Cl}$
$\,.\, \cup \,.\, b, c, x \varepsilon \mathrm{Cl} \,.\, \cup \,.\, x \varepsilon abc \,.\, \cup \,.\, a \varepsilon bcx \,.\, \cup \,.\, b \varepsilon acx \,.\, \cup \,.\, c \varepsilon abx$
$\,.\, \cup \,.\, ax \cap bc -= \Lambda \,.\, \cup \,.\, bx \cap ac -= \Lambda \,.\, \cup \,.\, cx \cap ab -= \Lambda.$

§ 11. Assioma XIV.

1. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} \,.\, a, b, c - \varepsilon \mathrm{Cl} \,.\, d \varepsilon bc \,.\, f \varepsilon ac : \supset \therefore e \varepsilon ad \,.\, e \varepsilon bf : -=_e \Lambda.$

Teoremi.

2. $a, b, d, f \varepsilon \mathbf{1} \,.\, a, b, d - \varepsilon \mathrm{Cl} \,.\, b'd \cap a'f -= \Lambda : \supset \,.\, ad \cap bf -= \Lambda.$
$\}P2 = P1\{$
3. $a, b, d \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, f \varepsilon a'bd : \supset \,.\, f \varepsilon b'ad.$ $\}P3 = P2\{$
4. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, \supset \,.\, ab'c \supset b'ac.$
5. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, p \varepsilon a'b \,.\, q \varepsilon a'c : \supset \,.\, pq \supset a'bc.$
$\}Hp \,.\, \supset : pq \supset pa'c \,.\, pa'c \supset a'pc \,.\, pc = cp \supset ca'b \,.\, ca'b \supset a'cb : \supset$
$: pq \supset a'pc \,.\, pc \supset a'cb \,.\, a'pc \supset a'cb : \supset \mathrm{Ts.}\{$
6. $h \varepsilon \mathrm{Cnv} \,.\, a \varepsilon \mathbf{1} \,.\, a - \varepsilon h : \supset a'h \varepsilon \mathrm{Cnv}.$
7. $h \varepsilon \mathrm{Cnv} \,.\, a \varepsilon \mathbf{1} \,.\, a - \varepsilon h : \supset \,.\, ah \cup h \cup a'h \varepsilon \mathrm{Cnv}.$
$\}Hp \,.\, P6 \,.\, \S 10\, P13 : \supset : aa'h \varepsilon \mathrm{Cnv} \,.\, \S 7\, P44 : \supset \mathrm{Ts}\{$
8. $h \varepsilon \mathrm{Cnv} \,.\, a \varepsilon \mathbf{1} \,.\, a - \varepsilon h : \supset \,.\, h \cup a'h \varepsilon \mathrm{Cnv}.$
9. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, p \varepsilon b'a \,.\, q \varepsilon c'a : \supset \,.\, pq \supset b'c'a.$
$\}Hp : \supset : pq \supset pc'a \supset c'pa \supset c'b'a : \supset \mathrm{Ts.}\{$
10. $h \varepsilon \mathrm{Cnv} \,.\, a \varepsilon \mathbf{1} \,.\, a - \varepsilon h : \supset \,.\, h'a \varepsilon \mathrm{Cnv}.$
11. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, d \varepsilon bc : \supset \,.\, adc \supset b'ad.$
$\}Hp \,.\, \supset : c \varepsilon b'd \,.\, dc \supset b'd \,.\, adc \supset ab'd \supset b'ad : \supset \,.\, \mathrm{Ts.}\{$
12. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, d \varepsilon bc : \supset \,.\, ac \supset b'ad.$
$\}Hp \,.\, \supset : c \varepsilon b'd \,.\, ac \supset ab'd \supset b'ad : \supset \mathrm{Ts.}\{$
13. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, d \varepsilon bc : \supset \,.\, b'ac \supset b'ad.$
$\}Hp \,.\, \supset \,.\, ac \supset b'ad \,.\, \supset \,.\, b'ac \supset b'b'ad = b'ad \,.\, \supset \,.\, \mathrm{Ts}\{$
14. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, d \varepsilon bc : \supset \,.\, adc \cup ac \cup b'ac \supset b'ad.$
$\}P14 =: P11 \,.\, P12 \,.\, P13\{$
15. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, d \varepsilon bc : \supset \,.\, b'ad = adc \cup ac \cup b'ac.$
$\}P15 =: P14 \,.\, \S 10\, P20\{$
16. $a, b, c \varepsilon \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, d \varepsilon bc : \supset \,.\, d'ab = c'ab \cup c'a \cup c'd'a.$
$\}Hp : \supset : x \varepsilon d'ab \,.=.\, a \varepsilon b'xd \,.=.\, a \varepsilon (x\,dc \cup xc \cup b'xc) \,.=.$
$x \varepsilon (c'd'a \cup c'a \cup c'ab) : \supset \,.\, \mathrm{Ts.}\{$

17. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} \,.\, d \in bc : \supset . (abc)'' = (abd)''$.

$\}\mathrm{Hp} . \supset : bc = bd \cup d \cup dc . abc = abd \cup ad \cup adc . a'bc = a'bd \cup a'd \cup a'dc . b'c'a = b'd'a \cup d'a \cup d'c'a$.

» $. \supset : d'b = c'b . a'd'b = a'c'b$.

» $. \supset : b'd = bd \cup d \cup b'c . a'b'd = a'bd \cup a'd \cup a'b'c$.

» $. \supset : b'ad = adc \cup ac \cup b'ac$.

» $. \supset : d'ab = c'ab \cup c'a \cup c'd'a$.

$\mathrm{Hp} . \supset . \mathrm{Ts}.\{$

18. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . d \in (bc)'' . d -= b : \supset . (abc)'' = (abd)''$.

19. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . d \in abc : \supset . (abc)'' = (abd)''$.

$\}\mathrm{Hp} . p \in bc . d \in ap : \supset . (abc)'' = (abp)'' = (abd)''\{$

20. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . d \in a'bc : \supset . (abc)'' = (abd)''$.

21. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . d \in (abc)'' . d - \in (ab)'' : \supset . (abc)'' = (abd)''$.

22. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . d, e \in (abc)'' . a, d, e - \in \mathrm{Cl} : \supset . (abc)'' = (ade)''$.

23. $a, b, c \in \mathbf{1} - \mathrm{Cl} . d, e, f \in (abc)'' . d, e, f - \in \mathrm{Cl} : \supset . (abc)'' = (def)''$.

24. $p \in \mathbf{3} . a, b, c \in p . a, b, c - \in \mathrm{Cl} : \supset . p = (abc)''$.

25. $p, q \in \mathbf{3} . a, b, c \in p \cap q . a, b, c - \in \mathrm{Cl} : \supset . p = q$.

26. $\mathbf{3} \supset \mathrm{Cnv}$.

27. $a, b, c, d \in \mathbf{1} . a, b, c - \in \mathrm{Cl} : \supset . a, b, c, d \in \mathrm{Cp} . = . d \in (abc)''$.

28. $a, b, c, d \in \mathbf{1} . \supset \therefore a, b, c, d \in \mathrm{Cp} . = : a, b, c \in \mathrm{Cl} . \cup . a, b, d \in \mathrm{Cl} . \cup . a, c, d \in \mathrm{Cl} . \cup . b, c, d \in \mathrm{Cl} . \cup . a \in bcd . \cup . b \in acd . \cup . c \in abd . \cup . d \in abc . \cup . ab \cap cd -= \Lambda . \cup . ac \cap bd -= \Lambda . \cup . ad \cap bc -= \Lambda$.

29. $p \in \mathbf{3} . r \in \mathbf{2} . a, b \in p \cap r . a -= b : \supset . r \supset p$.

30. $r \in \mathbf{2} . a \in \mathbf{1} . a - \in r . b \in r . c \in b'a . d \in c'r : \supset . d \in a'r$.

31. $r \in \mathbf{2} . c \in \mathbf{1} . c - \in r . a \in cr : \supset . c'r \supset a'r$. $\}\mathrm{P}31 = \mathrm{P}30\{$

32. $r \in \mathbf{2} . c \in \mathbf{1} . c - \in r . a \in cr : \supset . a'r = c'r$.

$\}\mathrm{P}32 = : \mathrm{P}31 . \S 10\ \mathrm{P}30\{$

33. $r \in \mathbf{2} . a \in \mathbf{1} . a - \in r . b \in r'r\, a : \supset . a'r = b'r$.

34. $r \in \mathbf{2} . a \in \mathbf{1} . a - \in r . c \in a'r . b \in c'r : \supset . b \in r'r\, a$.

35. $r \in \mathbf{2} . a \in \mathbf{1} . a - \in r . b \in r'r\, a : \supset . r'r\, a = r'r\, b$.

36. $r \in \mathbf{2} . a \in \mathbf{1} . a - \in r : \supset . (ar)'' \in \mathbf{3}$.

37. » » $: \supset . (ar)'' = r \cup r\, a' \cup r'r\, a$.

38. $p \in \mathbf{3} . a \in \mathbf{1} . a - \in p . b \in p'p\, a : \supset . a'p = b'p$.

39. » » $. c \in a'p . b \in c'p : \supset . b \in p'p\, a$.

40. » » $. b \in p'pa : \supset . p'pa = p'pb$.

§ 12. Assiomi XV e XVI.

Assioma XV.

1. $p \in \mathbf{3} \,.\, \supset \therefore a \in \mathbf{1} \,.\, a - \in p : - =_a \Lambda.$

Assioma XVI.

2. $p \in \mathbf{3} \,.\, a \in \mathbf{1} \,.\, a - \in p \,.\, b \in a'p \,.\, x \in \mathbf{1} : \supset : x \in p \,.\, \cup \,.\, ax \cap p - = \Lambda$
$\,.\, \cup \,.\, bx \cap p - = \Lambda.$

Teoremi.

3. $p \in \mathbf{3} \,.\, a \in \mathbf{1} \,.\, a - \in p \,.\, b \in a'p \,.\, c \in \mathbf{1} : \supset \,.\, p \cap (ac \cup c \cup cb) - = \Lambda.$
$\}$P3 = P2$\{$

4. $p, q \in \mathbf{3} \,.\, a \in p \cap q : \supset \therefore r \in \mathbf{2} \,.\, r \supset p \cap q : - =_r \Lambda.$
$\}$Hp $. \supset \therefore b \in q \,.\, b - = a : - =_b \Lambda.$ (α)
Hp $. b \in q \,.\, b - = a \,.\, b \in p : \supset : (ab)'' \in \mathbf{2} \,.\, (ab)'' \supset p \cap q : \supset$ Ts. (β)
Hp $. b \in q \,.\, b - \in p : \supset \therefore c \in q \,.\, c - \in (ab)'' : - =_c \Lambda.$ (γ)
Hp $. b - = a : \supset : d \in b'a \,.\, - =_d \Lambda.$ (δ)
Hp $. b \in \mathbf{1} \,.\, b - \in p \,.\, d \in b'a \,.\, c \in \mathbf{1} : \supset \therefore x \in p \,.\, x \in (bc \cup c \cup cd) :$
$- =_x \Lambda.$ (η)
Hp $. b \in q \,.\, b - \in p \,.\, c \in q \,.\, c - \in (ab)'' . \, d \in b'a \,.\, x \in p \,.\, x \in (bc \cup c$
$\cup\, cd) : \supset : d \in q \,.\, bc \cup c \cup cd \supset q \,.\, x \in q \,.\, a - \in (bc \cup c \cup cd) \,.$
$x - = a \,.\, (ax)'' \in \mathbf{2} \,.\, (ax)'' \supset p \cap q : \supset .$ Ts. (θ)
Hp $. b \in q \,.\, b - \in p \,.$ (γ) (δ) (η) (θ) $: \supset .$ Ts. (λ)
Hp . (α) (β) (λ) $: \supset .$ Ts.$\{$

NOTE

§ 1.

P2. Si legge « la proposizione $a = b$ è equivalente alla $b = a$ ». Volendo, invece dei punti, usare le parentesi, si dovrebbe scrivere

$$(a = b) = (b = a).$$

P3. « Dall'insieme delle proposizioni $a = b$, e $b = c$ si deduce la $a = c$ ». I punti stanno per indicare l'aggruppamento

$$((a = b)(b = c)) \supset (a = c).$$

Le proposizioni 1, 2, 3 esprimono le proprietà caratteristiche di ogni identità. Esse sono fra loro irreduttibili.

P4. « Se a e b sono punti, allora ab indica una classe di punti (figura) ».

P5. « Se a, b, c, d sono punti, a coincide con b, c con d, allora il segmento ab è identico a cd ».

Le proposizioni 4 e 5 dicono che « il segmento ab è una classe di punti, determinata dati i due punti a e b ».

Si ha così una categoria di enti, chiamati punti. Questi enti non sono definiti. Inoltre, dati tre punti, si considera una relazione fra essi, indicata colla scrittura $c \varepsilon ab$, la quale relazione non è parimenti definita. Il lettore può intendere col segno **1** una categoria qualunque di enti, e con $c \varepsilon ab$ una relazione qualunque fra tre enti di quella categoria; avranno sempre valore tutte le definizioni che seguono (§ 2), e sussisteranno tutte le proposizioni del § 3. Dipendentemente dal significato attribuito ai segni non definiti **1** e $c \varepsilon ab$, potranno essere soddisfatti, oppure no, gli assiomi. Se un certo gruppo di assiomi è verificato, saranno pure vere tutte le proposizioni che si deducono, non essendo queste proposizioni che trasformazioni di quegli assiomi e delle definizioni.

§ 2.

Per *definizione* si intende una proposizione della forma $x = a$, ovvero $\alpha \supset . x = a$, ove a è un aggregato di segni avente senso già noto, x è il segno, o gruppo di segni, che si vuol definire, ed α è l'ipotesi sotto la quale si dà la definizione. Dire che, dati certi enti, si può definire un nuovo ente x, significa che cogli enti dati si può formare un'espressione a in guisa che si abbia l'eguaglianza $x = a$.

È chiaro che non tutti gli enti si possono definire; ma è importante in ogni scienza di ridurre al minimo numero gli enti non definiti. Di questi si enuncieranno solo le proprietà. La riduzione degli enti non definiti al minimo numero presenta alcuna volta dell'arbitrario; così se mediante a e b si può definire c, e mediante a e c si può definire b, resta in nostro arbitrio la scelta come sistema irreduttibile fra a, b e a, c. Così, nel nostro caso, invece dei segni **1** e ab (punto e segmento) si sarebbero potuti assumere i segni **1** e $a'b$ (punto e raggio); la cosa non sarebbe stata possibile assumendo come concetti non definiti il punto e la retta.

Se in una scienza sonvi enti non definiti ed altri definiti, tutte le proposizioni di quella scienza esprimono proprietà dei soli enti non definiti.

Il significato qui attribuito alla parola *definizione* coincide, ovvero non, col comune? È facile il vedere che le definizioni che compaiono in matematica, eccettuate al più le prime tuttora oggetto di discussione, tradotte in simboli, hanno la forma precedente. Si esaminino ad es. le definizioni di *numero primo*, di *limite*, della *continuità delle funzioni*, di *derivata*, ecc.

P1. « Essendo a e b due punti, col segno $a'b$ si intende la classe formata dai punti x tali che il segmento ax contenga nel suo interno il punto b ».

P2. Per i segmenti, ed in generale, ove si intenda con $c \in ab$ una relazione simmetrica in a e b (Assioma V), sarà ab' identico con $b'a$. Se colla scrittura $c \in ab$ si intende « c è equidistante da a e da b », allora ab è il luogo dei punti equidistanti da a e da b; $a'b$

è la superficie sferica di centro b e passante per a. Gli accenti introdotti in queste due definizioni figurano in certo modo come segno d'inversione. Essi permettono di risolvere la relazione $c \varepsilon ab$ rispetto ad una qualunque delle tre lettere (§3 P4). Il segno ab' si può leggere « il prolungamento, dalla parte di a, del segmento ab ».

P3. « Se a è un punto, e k è una classe di punti, allora con ak si intende l'insieme di tutti i punti x che hanno la proprietà che esistono degli y, appartenenti alla classe k, tali che x sia un ay ».

P4. « Nelle stesse ipotesi, $a'k$ è il luogo dei punti x che stanno su qualche $a'y$, ove y appartenga a k ».

P5. « E con ak' si intende la figura formata dai prolungamenti dalla parte di a, dei segmenti che vanno da a ai varii punti di k ».

P6. « Se h e k sono due figure, con hk si intende l'insieme dei punti x aventi la proprietà che si può determinare un y, punto di h, in guisa che x appartenga alla figura yk ». Più brevemente (§3 P17), hk è la figura formata dai segmenti che vanno dai varii punti di h ai varii punti di k.

Le definizioni $3-8$ permettono di indicare con segni un gran numero di enti geometrici. Così abc indica un triangolo; $abcd$, ovvero $(ab)(cd)$, indicano tetraedri; $a'bc$ indica la porzione di piano limitata dal segmento bc e dai due raggi $a'b$ e $a'c$; $a'b'c$ è l'angolo formato dai due raggi $a'c$ e $b'c$; $ab'c$ è la porzione di piano limitata dal raggio $b'c$, dal segmento ac, e dal raggio condotto da a parallelamente a $b'c$; $a'b'c'd$ è un angolo triedro, ecc. Questo in generale. Ma quei segni, e altri più complicati hanno pure significato, se i punti giacciono in un piano, o sono in linea retta. Così $a'ab$ indica il raggio avente per termine a e contenente b.

Se col segno **1** si intendono i numeri (reali e finiti), e colla relazione $c \varepsilon ab$ si intende un'equazione fra a, b, c della forma $f(a, b, c) = 0$, allora la scrittura $d \varepsilon abc$ (d è un punto del triangolo abc) rappresenta la relazione fra a, b, c, d che risulta eliminando x fra le due equazioni $f(b, c, x) = 0$ e $f(a, x, d) = 0$.

P9. Questa definizione è sufficiente per le nostre ricerche geometriche. Ma data una classe h, applicando un numero finito di volte le definizioni 6, 7, 8 si ottengono delle classi, come hh, $h'h$,

$h(hh')'$, ecc., le quali, se nessuna proprietà si conosce dalla relazione fondamentale $c \varepsilon ab$, sono in numero infinito. Se a questa relazione si attribuiscono le comuni proprietà geometriche, esse non sono tutte distinte.

Si hanno definizioni di maggiore eleganza nel modo seguente. Essendo h una classe, si chiami *classe derivata* da h, e si indichi con h^* la classe formata da h, e da tutte quelle che se ne deducono ripetendo più volte le operazioni date dalle def. 6, 7, 8. La definizione di h^* non si può esprimere coi segni introdotti, poichè in essa occorre il concetto di numero. Essa si può esprimere mediante questi segni, e quelli introdotti nella « Arithmetices principia ». Allora si può definire per *retta* (P10) la classe derivata da due punti non coincidenti, e per *piano* (P12) la classe derivata da tre punti non collineari. Queste definizioni e quelle del testo, ammessi gli assiomi geometrici, finiscono per coincidere; ma, scambiando le definizioni, l'ordine delle proposizioni verrebbe del tutto alterato, poichè alcune proposizioni sulla retta e sul piano, che ora dipendono dagli ultimi assiomi, ne diventerebbero indipendenti, e viceversa.

P10. Il segno **2** si può leggere *retta*, poichè la classe qui definita è precisamente quello che chiamiamo retta, se alle parole punto e segmento attribuiamo il comune significato. Questa definizione si legge:

« Retta è ogni ente x avente la proprietà di potersi eguagliare ad un $(ab)''$, ove a e b siano punti distinti ».

P11. Il segno Cl si legga *collineari*.

« Se a, b, c sono punti, allora dire che a, b, c sono collineari, equivale a dire non è assurdo l'immaginare un ente r che sia una retta, e che contenga i punti a, b, c ».

P12. Il segno **3** si può leggere *piano*, per la ragione esposta alla P10.

« Piano è ogni ente $(abc)''$, ove a, b, c siano punti non collineari ».

P13. Il segno Cp leggasi *complanari*.

« Quattro punti diconsi complanari se giacciono in un medesimo piano ».

Le definizioni 11 e 13 sono abbreviazioni, di cui si potrebbe anche fare a meno.

P14. Il segno Cnv leggasi *figura convessa.*

« *Figura convessa* significa ogni ente x il quale sia una classe di punti, e sia tale che comunque si prendano a e b, purchè punti di x, si possa dedurre che ab è contenuto in x ».

Ossia « figura convessa è una figura che contiene tutto il segmento che unisce due suoi punti qualunque ».

§ 3.

I teoremi contenuti in questo § si deducono puramente dalle definizioni e assiomi logici; e sono qui opportune alcune parole sulla *dimostrazione*.

È noto che la Logica scolastica non è di sensibile utilità nelle dimostrazioni matematiche; poichè in queste mai si menzionano le classificazioni e regole del sillogismo, e d'altra parte vi si fa uso di ragionamenti, del tutto convincenti, ma non riduttibili alle forme considerate in Logica. Per questa ragione alcuni matematici, fra cui Cartesio, proclamarono essere l'evidenza l'unico criterio per riconoscere l'esattezza d'un ragionamento (*).

Ma questo principio lascia alla sua volta a desiderare. Una dimostrazione può essere più o meno evidente; essere evidente per una persona, dubbia per un'altra; e ad ognuno sarà successo di trovare insufficienti delle dimostrazioni già ritenute esatte. Esso poi lascia tanto più a desiderare nelle nostre ricerche, le quali si riferiscono a proposizioni, cui si è tanto abituati, che possono parere a molti pressochè evidenti.

Però questa questione è suscettibile di soluzione del tutto soddisfacente. Invero, ridotte, come qui si è fatto, le proposizioni in formule analoghe alle equazioni algebriche, allora, esaminando le comuni dimostrazioni, si scorge che esse consistono in trasforma-

---

(*) « La déduction se fait par le sentiment de l'évidence, qui n'a besoin d'aucune règle, et ne peut être supplée par aucune ». DUHAMEL, *Des Méthodes dans les sciences, etc.* (Paris 1875), I, p. 17.

zioni di proposizioni e gruppi di proposizioni, aventi massima analogia colle trasformazioni delle equazioni algebriche simultanee. Queste trasformazioni, o identità logiche, di cui facciamo continuamente uso nei nostri ragionamenti, si possono enunciare e studiare.

La raccolta delle identità logiche di cui facciamo uso fu già fatta nel mio opuscolo menzionato; molte di esse furono raccolte dal Boole. Il loro numero è grande; sarebbe uno studio interessante, e che finora manca, il distinguere le fondamentali, che si debbono ammettere senz'altro, dalle rimanenti, contenute nelle fondamentali. Questa ricerca porterebbe ad uno studio, sulla Logica, analogo a quello qui fatto per la Geometria, e nel precedente opuscolo per l'Aritmetica.

Nelle note seguenti trovansi alcuni saggi di queste trasformazioni.

P1. « Se a e b sono punti, si deduce: dire che c è un $a'b$, equivale a dire che c è un punto e che b è un ac. Dimostrazione: Questa prop. è equivalente alla P1 del §2 ».

È evidente che questa prop. è la def. 1 leggermente trasformata. Volendo esaminare più attentamente come la def. 1 si trasformi in questa, si sostituisca nella prop. $c \epsilon a'b$, al posto di $a'b$, il valore dato dalla def. 1. Si avrà: $c \epsilon a'b . = . c \epsilon (\mathbf{1} . [x \epsilon] (b \epsilon a x))$. Ora un'identità logica dice che, se h e k sono due classi di enti, si ha $a \epsilon h \cap k . = : a \epsilon h . a \epsilon k$. Applicando questa riduzione al secondo membro dell'equazione precedente, si avrà $c \epsilon a'b . = : c \epsilon \mathbf{1} . c \epsilon [x \epsilon] (b \epsilon ax)$. Ora, se α è una relazione contenente una lettera x, la proposizione $c \epsilon [x \epsilon] \alpha$, cioè c è uno di quegli enti x che soddisfano alla condizione α, è equivalente alla proposizione che si ottiene sostituendo in α, al posto di x, c; quindi $c \epsilon [x \epsilon] (b \epsilon ax) . = . b \epsilon ac$. Tenendo conto di questa identità si ha la formola a dimostrarsi.

Viceversa, da questa proposizione si può dedurre la P 1 del § precedente. Si faccia precedere ai due membri dell'eguaglianza tesi il segno $[c \epsilon]$; osservando che $[c \epsilon]\ c \epsilon a'b . = a'b$, poichè i due segni $[c \epsilon]$ e $c \epsilon$ si distruggono, e che $[c \epsilon] (c \epsilon \mathbf{1} . b \epsilon ac)$ vale $\mathbf{1} . [c \epsilon] (b \epsilon ac)$, in virtù dell'identità logica $[c \epsilon] (\alpha \beta) . = : [c \epsilon] \alpha . [c \epsilon] \beta$, si avrà la prop. 1 del § 2, ove al posto di x si legge c.

Noi ci fermeremo in seguito pochissimo nell'esame della trasfor-

mazione delle proposizioni, il quale, per chi non ha presenti tutte le identità logiche, risulta troppo faticoso.

Il lettore può continuare ad adottare, onde riconoscere se un ragionamento sia esatto, o non, il comune criterio dell'evidenza. Qui basta notare che queste trasformazioni sono assoggettate a regole fisse, raccolte nell'opuscolo menzionato.

P2. « *Dim.* Dalla prop. 1 si deduce la 2 ».

Ecco la trasformazione: Si congiunga ai due membri dell' eguaglianza tesi nella 1 la proposizione $c \,\epsilon\, \mathbf{1}$. Osservando che una proposizione ripetuta due volte equivale alla stessa scritta una volta sola ($\alpha\alpha = \alpha$), si avrà la proposizione

$$a, b \,\epsilon\, \mathbf{1} \,.\, \supset \therefore c \,\epsilon\, \mathbf{1} \,.\, c \,\epsilon\, a'b := c \,\epsilon\, \mathbf{1} \,.\, b \,\epsilon\, ac.$$

Ricorrendo alla proprietà logica

$$\alpha \supset . \beta\gamma = \beta\delta :=: \alpha\beta \supset . \gamma = \delta,$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono proposizioni (cioè dire che nell'ipotesi α, la condizione $\beta\gamma$ è equivalente alla $\beta\delta$, significa dire che dall'ipotesi $\alpha\beta$ si deduce $\gamma = \delta$), si ha la proposizione 2.

P3. La 3 si ottiene dalla def. 2 come la prop. 2 si è dedotta dalla def. 1.

P12. « Se a è un punto, h e k sono figure, e se h è parte di k, si deduce che ah' è parte di ak'. *Dim.* Dall'ipotesi e da P8 si deduce che la proposizione $x \,\epsilon\, ah'$ vale: x è un punto, ed esistono dei punti comuni ad h e $x'a$; da questa si deduce che x è un punto, ed esistono dei punti comuni a k e a $x'a$; questa vale $x \,\epsilon\, ak'$; adunque da $x \,\epsilon\, ah'$ si deduce $x \,\epsilon\, ak'$, ossia la tesi ».

Le identità logiche cui si ricorre in questa dimostrazione sono: Se h, k, l sono classi (d'una stessa categoria), si ha

$$h \supset k \,.\, \supset . \, h \cap l \supset k \cap l,$$

cioè se h è contenuto in k, anche la classe $h \cap l$ è contenuta in $k \cap l$. Poi

$$h \supset k \,.\, h -= \Lambda : \supset . \, k -= \Lambda,$$

cioè se h è contenuto in k, ed esistono degli h, esistono pure dei k. Infine alla

$$h \supset k \,.=: x \,\epsilon\, h \,.\, \supset_x . \, x \,\epsilon\, k,$$

cioè dire che h è contenuta in k, vale dire che tutte le volte che x è un h, si possa dedurre che x è un k.

Le prop. 10 e 11 si enunciano e dimostrano come la 12.

P29. « Se a, b, c sono punti, non collineari, allora $(a\,b\,c)''$ è un piano ».

§ 4.

P1. « La classe *punto* non è nulla », ossia « esistono dei punti ».

Di questo assioma non avremo mai occasione di fare uso, e si potrebbe sopprimere. Si è citato per analogia cogli assiomi II, IV, VII, XII, XV. Del resto questa proposizione fa parte dell'ipotesi di quasi tutte le proposizioni. Così nell'assioma seguente l'ipotesi è che a sia un punto, dalla quale ipotesi si deduce che esistono dei punti.

P2. « Se a è un punto, si deduce che l'essere x un punto diverso da a non è, rispetto ad x, assurdo », ossia « dato un punto, esistono dei punti non coincidenti in esso ».

Di questo assioma si fa uso solo in §9P20, e precisamente per poter affermare « tre punti coincidenti sono collineari ». Questo assioma è pure contenuto nelle ipotesi di alcune proposizioni, ad es. nell'ass. IV.

P3. « Se a è un punto, la classe aa è nulla ».

Se al posto della relazione fondamentale $c \,\epsilon\, ab$ si sostituisce una relazione qualunque fra tre enti, questa proposizione non è in generale vera. Se **1** significa numero (finito), e si prende per relazione fondamentale un'equazione $f(a, b, c) = 0$, che supporremo algebrica e di primo grado in c, affinchè sia vera la prop. 3, che qui nel nostro caso significa: « l'equazione $f(a, a, c) = 0$ non può essere soddisfatta da alcun valore di a e di c », bisogna che il coefficiente di c in $f(a, b, c)$ sia divisibile per $a - b$, e non lo sia il termine noto. Se il coefficiente di c è $a - b$, allora questa relazione soddisfa ai due assiomi III e IV.

P6. « Se a, b sono punti, e c è un punto di ab, saranno a e b distinti ». Le P4 e 5 sono i passaggi intermediarii dalla P3 alla 6.

§ 5.

P1. L'assioma V dice che il segmento ab è funzione simmetrica di a e b. Non ogni relazione sostituita al posto di $c \,\epsilon\, ab$, è simme-

trica rispetto ad a e b. Se a, b, c sono numeri, e $f(a, b)$ è una funzione simmetrica di a e b, la relazione $(a-b)^2 c = f(a, b)$ soddisfa a tutti gli assiomi finora enunciati.

P9. Se con ab si fosse inteso il sistema di punti giacenti sul segmento ab, compresi gli estremi, l'assioma VI non sarebbe verificato.

P16. L'assioma VII dice che un segmento non nullo si può prolungare da una qualunque delle sue parti.

Gli assiomi finora enunciati esprimono le proprietà primordiali dei segmenti; quelli che seguono sono alquanto più complicati.

Il sig. M. Pasch nel suo pregevole libro *Vorlesungen über Geometrie* (Leipzig 1882), onde studiare le proprietà della retta, parte pure dal concetto di segmento, enunciandone le proprietà fondamentali mediante *Grundsätze* (Assiomi) e quelle che se ne possono dedurre mediante *Lehrsätze* (Teoremi). Ecco i due primi assiomi del Pasch:

« I. Zwischen zwei Punkten kann man stets eine gerade Strecke ziehen, und zwar nur eine ».

« II. Man kann stets einen Punkt angeben, der innerhalb einer gegebenen geraden Strecke liegt ».

Si scorge l'equivalenza di questa seconda proposizione col mio Ass. IV.

Qual'è il significato della prima? L'espressione « due punti » presenta una prima ambiguità, indicando essa, nel linguaggio comune, ora « due punti qualunque » ora « due punti distinti ». Nel primo significato la prima parte della prop. I si può tradurre

$$a, b \in \mathbf{1} . \supset . ab \in \mathrm{K}\,\mathbf{1},$$

la quale è la P4 del §1. Nel secondo significato essa si traduce

$$a, b \in \mathbf{1} . a -= b : \supset . ab \in \mathrm{K}\,\mathbf{1},$$

ed allora si escludono i segmenti nulli. È nel secondo significato che vanno intese le parole dell'A., come si vede dalla prop. II.

La stessa espressione « due punti » si presta ancora ad un'altra ambiguità, poichè essa indica talvolta la successione (disposizione) di due punti, altra volta il gruppo (combinazione) dei punti. Nel primo caso, la seconda parte della prop. I si può interpretare

$$a, b, c, d \in \mathbf{1} . a = b . c = d : \supset . ac = bd$$

che è la P5 del §1. Nel secondo caso essa significa:

$$a, b, c, d \varepsilon 1 \therefore a = b \,.\, c = d : \cup : a = d \,.\, b = c :: \supset . \, ac = bd,$$

ovvero, brevemente,

$$a, b, c, d \varepsilon 1 \,.\, a \cup c = b \cup d : \supset . \, ac = bd,$$

ed allora essa comprende anche l'Ass. V del presente scritto. È la seconda interpretazione che bisogna dare alle parole dell'A.

Si vede da questa breve discussione quanto sia difficile in questioni così delicate, anche ad un accurato scrittore, evitare ogni pericolo di ambiguità, ove si proceda col linguaggio comune. Onde vincere questa difficoltà occorre analizzare ogni proposizione, e fissare completamente il valore dei termini di cui ci serviamo. Così facendo si arriva necessariamente o alle notazioni logiche, che qui uso, o a un sistema equivalente.

Il Grundsatz III del Pasch significa:

$$a, b \varepsilon 1 \,.\, c \varepsilon ab : \supset : a - = c \,.\, a - = b \,.\, a - \varepsilon bc.$$

Esso è un gruppo di tre proposizioni. L'una è la P11 del §5, equivalente all'Ass. VI, l'altra è la P6 del §4, equivalente all'Ass. III; l'ultima è la P18 del §6, e questa è un teorema.

I Grundsätze IV, V, VI, VII, VIII del Pasch corrispondono ai miei Ass. VIII, IX, VII, X, XI.

In seguito, poichè il Pasch considera la porzione di piano come un nuovo ente non definito, cessa ogni analogia fra il suo studio e il mio.

§ 6.

Le proposizioni contenute in questo § e nei successivi, non hanno tutte eguale importanza; molte di esse costituiscono una successione di trasformazioni, colle quali, partendo da una proposizione se ne deduce un'altra.

Un procedimento notevole di trasformazione di proposizioni, e di cui facciamo uso qui ed in seguito, è l'eliminazione che sta nella seguente regola:

« Avendosi una proposizione, i cui due membri (*Hp* e *Ts*) contengano una stessa indeterminata x, si metta, ove sia possibile, la proposizione sotto la forma:

$$a \,.\, x \varepsilon h : \supset . \, x \varepsilon k,$$

ove a è una proposizione, o gruppo di proposizioni, non contenente la x, e h e k sono classi.

Allora la stessa proposizione si può scrivere:

$$a . \supset . h \supset k,$$

nella quale non comparisce più la lettera x ».

L'assioma VIII ha già la forma voluta per l'eliminazione di b (si osservi che $b \varepsilon 1 . b \varepsilon ac : = : b \varepsilon ac$). Eliminando b, si ha la P 2; da questa con uno scambio di lettere, la 3. Dalla 3 e dalla 4, la quale si ottiene dalla 3 permutando a con b, si ha la proposizione 5 che comprende le precedenti.

Dalla 7, eliminando c, si ha la 8. Dalla 9 si deduce la 10 prima eliminando b, e poi sostituendo la lettera b a c.

Qui per brevità si è già tralasciato di enunciare la proposizione intermedia; e in generale, man mano che si progredisce, aumenta il numero delle proposizioni intermedie omesse. Dalla stessa proposizione 7, che si può mettere sotto la forma 9, eliminando c si ha la 10. E questo gruppo di proposizioni è compendiato nella 11.

Eliminando invece, dall'assioma da cui partiamo, il d, si ha la proposizione 12. Onde eseguire questa eliminazione occorre risolvere le proposizioni $c \varepsilon ad$ e $b \varepsilon ad$, che contengono d, rispetto a questa lettera, scrivendo al posto di esse $d \varepsilon a'c$ e $d \varepsilon a'b$; allora si applica la regola enunciata.

Le proposizioni 13-17 costituiscono un altro gruppo; l'ultima contiene tutte le precedenti.

La 18 non ha propriamente la forma $Hp \supset Ts$, che hanno le precedenti. Si può mettere sotto questa forma trasportando una delle proposizioni che costituiscono l'ipotesi nel secondo membro; essa si può per esempio leggere

$$a, b, c \varepsilon 1 . c \varepsilon ab : \supset . b - \varepsilon ac.$$

Allora si può eseguire l'eliminazione d'una qualunque delle tre lettere che vi compaiono colla regola esposta. Ma volendo considerare la proposizione sotto la forma che essa ha, si può usare la regola seguente.

« Avendosi un proposizione, il cui secondo membro sia Λ, e il cui primo membro contenga un'indeterminata x, si risolvano, ove

si possa, le proposizioni che contengono x, rispetto a questa lettera, e si riduca la proposizione alla forma

$$a \,.\, x \varepsilon h \,.\, x \varepsilon k \,.\, x \varepsilon l : = \Lambda$$

ove a è una proposizione non contenente x, e h, k, l sono delle classi. Allora la stessa proposizione si può scrivere

$$a \supset . h \cap k \cap l = \Lambda,$$

in cui non comparisce la x ».

Eliminando con questa regola la c dalla 18 si ha la 19; eliminando invece la a si ha la 20, da cui, con una permutazione di lettere la 21. L'eliminazione di b condurrebbe di nuovo alla 19.

Per eliminare la lettera c dall'assioma VIII, si osservi che questa lettera comparisce nell'*Hp.* e non nella *Ts.*; quindi non siamo in nessuno dei due casi precedentemente trattati. Si può ridurre al secondo trasportando la *Ts.* nel primo membro. Del resto la regola ad applicarsi in questo caso è la seguente:

« Se una proposizione è riduttibile alla forma

$$a \,.\, x \varepsilon h \,.\, x \varepsilon k : \supset . b,$$

ove x è una indeterminata, a e b sono proposizioni non contenenti x, e h, k sono classi, la stessa proposizione si può scrivere, eliminando x,

$$a \,.\, h \cap k - = \Lambda : \supset b$$ ».

Eliminando c dall'Ass. VIII con questa regola si ha la 22, da cui, con trasformazioni, le 24 e 26.

Dall'Ass. VIII si potrebbe pure eliminare a. Il risultato è la proposizione poco interessante:

$$b, c, d \varepsilon \mathbf{1} . \supset . d'c \cap c'b \supset d'b.$$

« Se b, c, d sono punti, allora ogni punto comune ai due raggi $d'c$ e $c'b$ appartiene al raggio $d'b$ ».

§ 7.

Dall'Ass. IX eliminando b si ha la 2, o con scambio di lettere la 3, la quale unita con una del § precedente, dà luogo alla 4.

Eliminando c dalla 5 si ha la 6, da cui si ricavano in modo analogo al precedente le 7 e 8. Eliminando a dalla stessa proposizione

si ha la 22; eliminando d si ha la 27. L'eliminazione di b darebbe nulla d'importante.

Le proposizioni più importanti di questo § sono le 4, 16, 19, 20, 21, 30, 31, 35, 43, 46.

Le altre, o sono trasformazioni intermediarie, oppure proposizioni che saranno completate dagli assiomi che seguono.

§ 8.

All'Assioma X si può sostituire la proposizione seguente:

$$a, b \in \mathbf{1} \,.\, c, d \in a'b :\supset\therefore e \in \mathbf{1} \,.\, c, d \in ae : -=_e \Lambda.$$

« Se a e b sono punti, e c, d sono punti del raggio $a'b$, allora esiste un punto e tale che i punti c e d appartengano al segmento ae ».

Si immagini una porzione di superficie qualunque, e dicansi **1** i punti interni ad essa. Si supponga che esista sempre uno ed un solo arco di geodetica congiungente due punti qualunque della superficie data, e che esso sia sempre interno alla porzione considerata. Indicando con ab l'arco di geodetica che unisce i due punti a e b, interni a quella porzione di superficie, sussisteranno tutti gli assiomi precedenti il X; questo, a seconda dei casi, potrà essere vero, o non; quindi esso non è conseguenza dei precedenti.

Le proposizioni più importanti di questo § sono le 4, 12, 15, 19.

§ 9.

Gli assiomi X e XI si possono sostituire con questa sola proposizione:

$$a, b, c, d \in \mathbf{1} \,.\, p, q \in ab.\ p, q \in cd \,.\, p -= q :\supset\therefore\ x, y \in \mathbf{1} \,.\, a, b, c, d \in xy : -=_{xy} \Lambda.$$

« Se a, b, c, d sono punti ed i segmenti ab e cd hanno comuni due punti distinti, quei quattro punti appartengono ad uno stesso segmento ».

Sono a notarsi le P. 3, 5, 8, 15, ecc.

Molte altre proposizioni si possono dedurre dagli assiomi finora enunciati. Si lascia al lettore la cura di esaminare da quali di

questi assiomi dipendano le proposizioni seguenti, ed altre analoghe:

$a, b, c \in 1 . \supset : ac \supset ab : = . c \in a \cup ab \cup b.$

» $ac = ab . = . c = b.$

» $a'c = a'b . = . c = b.$

» $a'c \supset a'b . = . c \in a \cup b \cup a'b.$

» $bc \supset a'b . = . c \in b \cup a'b.$

» $c'a = b'a . = . c \in a'ab.$

§ 10.

P1. « Esistono dei punti non contenuti in una data retta ». Questo Ass. occorre solo in §11 P28, onde poter dedurre che quattro punti collineari sono anche complanari.

Nelle P22, 31 i punti (...) stanno per brevità al posto di termini, scritti nella P32.

Si notino le P. 6, 9, 13-15, 27, 32, ecc.

§ 11.

Si notino le P. 4, 6, 7, 10, 15, 16, ecc.

La dimostrazione della P17, benchè lunga, è per concetto semplice. Si fa vedere che le varie parti della figura $(abc)''$, diversamente raggruppate, formano la figura $(abd)''$. Da essa si deduce una successione di altre, di cui le ultime, più importanti, sono le 24 e 25.

§ 12.

L'assioma XV dice « dato un piano, esistono dei punti non contenuti in esso ».

Di questa proposizione non avremo occasione di fare uso nelle poche proposizioni seguenti. Essa però è necessaria in altre ricerche.

L'assioma XVI dice: « dato un piano, e due punti da bande opposte del piano, allora ogni punto dello spazio o sta sul piano dato, ovvero uno dei segmenti che lo uniscono ai punti dati incontra il piano ». Questa proposizione dice in sostanza che lo spazio che noi consideriamo è a tre dimensioni. Questo assioma serve per dimostrare la

proposizione che segue « due piani aventi un punto comune, hanno comune una retta ».

Si osservi però che si può dimostrare, senza bisogno degli assiomi del presente paragrafo, la proposizione:

$$p \varepsilon \mathbf{3} \,.\, a, b, c, d \varepsilon p \,.\, a -= b \,.\, c -= d \,.\, e \varepsilon \mathbf{1} \,.\, e - \varepsilon p : \supset \therefore r \varepsilon \mathbf{2} \,.\, r \supset (eab)'' \,.\, r \supset (ecd)'' : -=_r \Lambda.$$

« I piani che uniscono un punto e con due rette ab e cd d'uno stesso piano non passante per e s'incontrano secondo una retta ».

Di questo solo caso particolare si fa uso nella Geometria di posizione. Di qui (e dall'Ass. XV) si deduce il noto teorema sui triangoli omologici, e le innumerevoli conseguenze. Quindi la Geometria di posizione non ha bisogno dell'Assioma XVI.

APPENDICE

Delle parallele.

Le parallele si possono definire, coi concetti finora introdotti, o secondo Euclide, o secondo la Pangeometria; quindi si può svilupparne la teoria.

Che il postulato di Euclide sulle parallele non sia contenuto negli Assiomi qui enunciati, risulta da ciò, che, se col segno **1** si intendono i punti interni ad una data sfera, o ad un dato solido convesso, e ad ab si attribuisce il comune significato, allora sussistono tutti gli assiomi finora enunciati; ma non è verificato il postulato di Euclide.

Attenendoci quindi ai metodi della Pangeometria, daremo della relazione « il raggio $a'b$ è parallelo al raggio $c'd$ », e che indicheremo con $a'b \,||\, c'd$, la seguente

Definizione.

$$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathbf{1} \,.\supset :\, a'b \,||\, c'd \,.=.\, bc'd = da'b.$$

Le dimostrazioni che si dànno in Pangeometria delle proprietà delle parallele sono tutte basate sulle idee di moto e di grandezza. È quindi interessante di vedere quali proprietà si possano dedurre dai soli Assiomi qui enunciati.

L'esistenza di un raggio passante per un dato punto e parallelo ad un dato raggio si può dimostrare, ove si ammetta il seguente

Assioma XVII.

$$h \varepsilon \mathrm{Cnv} \,.\, a, b \varepsilon 1 \,.\, a \varepsilon h \,.\, b - \varepsilon h :\supset \therefore x \varepsilon a \cup ab \cup b \,.\, ax \supset h \,.\, bx \supset - h : - =_x \Lambda .$$

« Se h è una figura convessa, e se a e b sono punti, il primo appartenente a h, il secondo non, allora si può determinare un punto x, appartenente al segmento ab o ai suoi estremi, in guisa che il segmento ax sia contenuto in h, e il segmento bx sia tutto fuori di h.

Questo Assioma, che esprime in parte la proprietà che suolsi chiamare la continuità della retta, è necessario in molte altre questioni.

Si possono allora dimostrare le proposizioni

$$a, b, c, d \varepsilon 1 \,.\, a'b \parallel c'd :\supset .\, c'd \parallel a'b .$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad .\, e \varepsilon a'b :\supset .\, a'e \parallel c'd .$$

$$a, b, c, d, e, f \varepsilon 1 \,.\, a'b \parallel e'f \,.\, c'd \parallel e'f :\supset .\, a'b \parallel ef .$$

Del moto.

Il trasporto d'una figura rigida da una posizione ad un'altra dello spazio, è un ente che occorre assumere senza definizione, ovvero si può definire mediante gli enti finora introdotti?

Possiamo assumere come noto il concetto di *corrispondenza* o di *funzione*, per cui ad ogni ente d'un dato sistema si fa corrispondere un nuovo ente dello stesso o d'un altro sistema, e ritenerlo appartenente alla Logica; nel mio opuscolo « Arithmetices principia » ne sono esposte alcune proprietà.

Allora si può definire l'omografia, come una corrispondenza dei punti dello spazio, ed il trasporto d'una figura da una posizione ad

un'altra, ossia l'eguaglianza di due figure come una particolare omografia.

Delle figure convesse.

Nelle pagine precedenti furono sviluppate parecchie proprietà delle figure convesse. Meritano ancora interesse le seguenti proprietà metriche.

« Se h è una figura piana, convessa, finita, il limite superiore delle aree poligonali interne ad h è eguale al limite inferiore delle aree poligonali contenenti nel loro interno h; e il limite superiore dei perimetri dei primi poligoni (supposti convessi) è eguale al limite inferiore dei perimetri dei secondi poligoni ».

Sussiste una proprietà analoga per le figure solide.